

Digitale Werkzeuge und selbstreguliertes Lernen im Mathematikunterricht

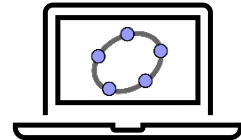
Workshop, Gesamtschultag „Eine gute Schule für alle!“ am 04.09.2023 in Osnabrück

Patrick Bulthaupt und Tomma Jetses

Einsatz von GeoGebra (Haug & Leuders, 2009; Hohenwarter, 2014; Oldenburg, 2005)

Kernfunktionen (auch anderer) DGS:

- Erstellen geometrischer Objekte
- Zugmodus
- Spurfunktion
- Makros
- Messen von Größen



Im Workshop genannte Chancen und Risiken beim Einsatz von GeoGebra:

Chancen	Risiken
<ul style="list-style-type: none">• Visualisierung, vielfältige Darstellungsmöglichkeiten → Anschaulichkeit, Plausibilität durch Dynamik (z. B. Schieberegler)• Vernetzung von Darstellungsebenen ((virtuell-)enaktiv, ikonisch, symbolisch)• Vielfältige Einsatzmöglichkeiten (Verknüpfung Geometrie & Algebra; TR-/ CAS-Er-satz)• Eigenständiges, entdeckendes, erkunden-des, interaktives Arbeiten/ Lernen• Verminderung des Kalkül-lernens• Individualisierung des Lernmaterials• Breites Angebot an bestehenden Lernum-gewungen, digitalen Arbeitsblättern• Möglichkeit des direkten Feedbacks• Grundsätzlich intuitives Programm• Zeitersparnis (z. B. Zeichnen von Funkti-onsgraphen)• Schrittweise Konstruktionen → Systemati-sierung des Vorgehens	<ul style="list-style-type: none">• Technische Herausforderungen (Soft- & Hardware)• Übersichtlichkeit der App auf Tablets; gleichzeitige Nutzung von GeoGebra und Schreibprogramm erschwert• Eigenständige Konstruktionen für Ler-nende z. T. komplex; Fehlerquellen bei manuellen Konstruktionen nicht ersicht-lich → Überforderung• Erhöhter Zeitaufwand (Vorbereitungszeit für Lehrkräfte, in Klausuren, im Unterricht durch evtl. techn. Probleme)• Unhinterfragte Anwendung, oberflächli-cher Umgang mit z. B. Funktionen/ Funkti-onsgraphen (kein kritisches Auseinander-setzen)• Ablenkung der Lernenden• Verlernen des Umgangs mit mathemati-schen Werkzeugen (z. B. Geodreieck, Zir-kel, ...)• Mangelnde Erfahrungen, Fähigkeiten (z. B. Prüfungsmodus, Bedienung des Pro-gramms, ...)

Selbstständiger(er) Einsatz von GeoGebra (Bauer, 2015; Drijvers et al., 2020; Hankeln & Greefrath, 2020; Haug, 2012; Haug & Leuders, 2009; Jones, 2002; Olsson, 2019; Roth, 2022; Roth, 2019)

- Vorgabe, welche Funktionen zu welchem Zweck genutzt werden sollen (sog. *Animationen* oder *Simulationen*)
- (teilweise) vorstrukturierte Lernumgebungen

→ wenig selbstständiger Einsatz



Möglichkeiten zur Anpassung von digitalen Lernumgebungen für einen selbstständigeren Einsatz:

- Ziel weniger einschränken
- Werkzeugauswahl freistellen durch Erweiterung der Werkzeugleiste
- Textfeld entfernen und Aufträge zum „Entdeckenden Lernen“ formulieren
- Teile der Konstruktion selbst konstruieren bzw. Konstruktion ergänzen lassen
 - Kreis, Kreisbogen
 - Referenzdreieck
 - Funktionale Darstellung ergänzen
- Gestufte Hilfen einbauen
 - Schaltflächen zum Anzeigen der Hilfen nutzen
 - Schritt-für-Schritt Konstruktionsanleitungen
- Reflexionsanlässe formulieren:
 - Warum funktioniert das Applet?
 - Was würde passieren, wenn man den Kreis vergrößert?
 - Was würde passieren, wenn man C über den Kreisbogen hinausbewegt?
 - Beispielhafter Arbeitsauftrag: Was wäre, wenn wir da nicht mehr den Einheitskreis, sondern einen Kreis mit Radius 2 nutzen?

Weiterführende Informationen zu GeoGebra – Grundbefehle, Tipps und Linksammlung

Grundbefehle:

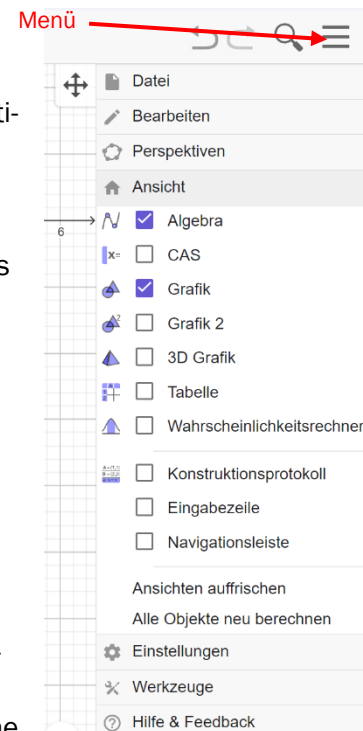
Befehl zur Eingabe	Output des Befehls
$A := (\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle)$	Definiert den Punkt A mit kartesischen Koordinaten (x,y,z). Funktioniert auch zweidimensional.
Punkt(<Objekt>)	Erzeugt einen variablen, an das Objekt fixierten Punkt.
Mittelpunkt(<Punkt>, <Punkt>)	Bestimmt den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten.
Schnittpunkt(<Objekt>, <Objekt>)	Berechnet den Schnittpunkt zwischen zwei Punkten.
Kreis(<Mittelpunkt>, <Radius>)	Erzeugt einen Kreis um den angegebenen Mittelpunkt, welcher den angegebenen Radius hat.
Kreis(<Mittelpunkt>, <Punkt>)	Erzeugt einen Kreis um den angegebenen Mittelpunkt, welcher durch den anderen Punkt verläuft.
Kreis(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>)	Erzeugt den Umkreis des Dreiecks, welches durch die drei angegebenen Punkte definiert ist.
Tangente(<Punkt>, <Kegelschnitt oder Funktion>)	Erzeugt eine Tangente an die gegebene geometrische Figur zu gegebenem Berührungspunkt.
Mittelsenkrechte(<Punkt>, <Punkt>)	Zeichnet die Mittelsenkrechte der Strecke mit den beiden gegebenen Streckenendpunkten.
Mittelsenkrechte(<Strecke>)	Zeichnet die Mittelsenkrechte zu einer gegebenen Strecke. Wichtig: Funktioniert natürlich nicht bei Gerade oder Strahl.
Winkel(<Punkt>, <Scheitelpunkt>, <Punkt>)	Berechnet den Winkel, der durch die drei Punkte bestimmt wird, wobei das Ergebnis zwischen 0° und 360° bzw. 0 und 2π liegt.
Winkelhalbierende(<Gerade>, <Gerade>)	Halbiert den eingespannten Winkel zwischen zwei Geraden bzw. Geradenabschnitten (falls vorhanden: Beide Winkel) durch neu eingezeichnete Geraden.
Ortslinie(<abhängiger Punkt Q der Ortslinie erzeugt>, <unabhängige Variable>)	Erzeugt die Ortslinie vom abhängigen Punkt Q bei Veränderung der unabhängigen Variable. Unabh. Variable kann durch einen Punkt oder Schieberegler gegeben sein.
Drehe(<Objekt>, <Winkel>, <Punkt>)	Dreht das geometrische Objekt um den gegebenen Punkt unter Berücksichtigung des gegebenen Winkels.
Länge(<Objekt>)	Berechnet die Länge eines Objektes.
Senkrechte(<Punkt>, <Objekt>)	Zeichnet eine zu dem Objekt (Gerade, Strahl, Ebene, ...) senkrechte Gerade durch den angegebenen Punkt.
Würfel(<Punkt>, <Punkt>)	Erstellt einen Würfel (3D-Ansicht) mit zwei gegebenen Eckpunkten.
Schneide(<Objekt>, <Objekt>)	Erzeugt Schnittfigur/ Schnittpunkte zweier Objekte.
Schieberegler(<Min>, <Max>, <Schrittweite>)	Erstellt einen Schieberegler im Intervall zwischen Maximum und Minimum mit der angegebenen Schrittweite.
$f(x) := \langle \text{Funktionsterm} \rangle$	Definiert die Funktion f durch einen Funktionsterm.
$f'(x)$	Berechnet die erste Ableitung der Funktion f.

Funktion(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>)	Schränkt Definitionsbereich einer Funktion ein.
Parabel(<Brennpunkt>,<Leitlinie>)	Erzeugt eine Parabel zu gegebener Leitlinie und gegebenem Brennpunkt.
Tangente(<Punkt auf Funktion>,<Funktion>)	Erstellt eine Tangente durch einen Punkt auf einer Funktion.
Integral(<Funktion>)	Berechnet Stammfunktion ohne Integrationskonstante und erzeugt Graph der Stammfunktion. Integration nach x.
Integral(<Funktion>,<Variable>)	Berechnet Stammfunktion ohne Integrationskonstante und erzeugt Graph der Stammfunktion. Integration nach angegebener Variable (falls mehrere Variablen enthalten).
Integral(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>)	Berechnet das bestimmte Integral der Funktion im Intervall vom Startwert bis zum Endwert.
IntegralZwischen(<Funktion1>,<Funktion2>,<Startwert>,<Endwert>)	Berechnet das bestimmte Integral der Differenzfunktion <Fkt2>-<Fkt1> im Intervall.
Integral(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>,<Wahrheitswert Berechne>)	Berechnet das bestimmte Integral der Funktion im Intervall [Startwert, Endwert] und schattiert die Fläche, wenn Berechne = true. Falls Berechne = false, wird die Fläche schattiert, aber der Wert des Integrals nicht berechnet.
Integral(<Funktion>,<Variable>,<Startwert>,<Endwert>)	Nur im CAS! Berechnet das bestimmte Integral der Funktion im Intervall [Startwert, Endwert].
IntegralZwischen(<Funktion>,<Funktion>,<Variable>,<Startwert>,<Endwert>)	Gibt das bestimmte Integral nach einer Variablen der Differenz zweier Funktionen im Intervall [Startwert, Endwert] an.
IntegralZwischen(<Funktion>,<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>,<Wahrheitswert Berechne>)	Berechnet das bestimmte Integral der Differenz zweier Funktionen im Intervall [Startwert, Endwert] und schattiert die Fläche, wenn Berechne = true. Falls Berechne = false, wird die Fläche schattiert, aber der Wert des Integrals nicht berechnet.
Obersumme(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>,<Anzahl der Rechtecke>)	Zeichnet zu einer Funktion das Histogramm der Obersumme innerhalb eines Intervalls zu gegebener Feinheit der (äquidistanten) Zerlegung und berechnet den Wert.
Untersumme(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>,<Anzahl der Rechtecke>)	Zeichnet zu einer Funktion das Histogramm der Untersumme innerhalb eines Intervalls zu gegebener Feinheit der (äquidistanten) Zerlegung und berechnet den Wert.
Ableitung(<Funktion>)	Berechnet die Ableitung einer gegebenen Funktion
Ableitung(<Funktion>,<Grad der Ableitung>)	Berechnet die Ableitung der Funktion vom angegebenen Grad und erzeugt den Graphen dieser Ableitungsfunktion.
Steigung(<Gerade>)	Berechnet die Steigung einer Gerade und erzeugt ein Steigungsdreieck der x-Breite 1 Längeneinheit.
Extremum(<Funktion>,<Startwert>,<Endwert>)	Bestimmt numerisch die Extrempunkte der gegebenen Funktion und zeichnet sie ein.
Nullstelle(<Funktion>)	Bestimmt numerisch die Nullstellen der gegebenen Funktion und erzeugt einen Punkt zur Nullstelle.

(weitere Befehle finden Sie z. B. im GeoGebra-Handbuch, s. Linksammlung)

Tipps zur Bedienung von GeoGebra 6 (aktuelle Desktop-Version):

- Ansichten
 - GeoGebra stellt verschiedene Ansichten für mathematische Objekte zur Verfügung (Algebra-Ansicht, Grafik-Ansicht, 3D Grafik-Ansicht, Tabellen-Ansicht, CAS-Ansicht)
 - Auswahl der anzuzeigenden Ansichten erfolgt über das Menü
 - Darstellungen der jeweiligen Objekte sind dynamisch miteinander verbunden und werden in Ansichten gleichzeitig dargestellt, sodass Änderungen in der einen Ansicht automatisch in den anderen Ansichten übernommen werden
- Werkzeugleiste
 - Am oberen Bildschirmrand fixiert
 - Jede Ansicht (abgesehen von der Algebra-Ansicht) hat ihre eigene Werkzeugleiste mit entsprechenden Werkzeugen
 - Neben den obigen Befehlen können häufig auch solche Werkzeuge für das Erstellen von Objekten genutzt werden
- Eingabezeile, Navigationsleiste und Konstruktionsprotokoll
 - Ein-/Ausblenden erfolgt über das Menü



Auswahl an hilfreichen Werkzeugen in der Grafik-Ansicht:




vorgestellte
Werkzeuge

- Schaltflächen
 - Funktion: Auslösen von Skripten durch Anklicken
 - Anleitung zur Erstellung: Auswahl des Werkzeugs → Klicken in die Grafik-Ansicht zur Erzeugung einer Schaltfläche → Festlegen von Beschriftung und Skript (Alternativ: Erstellung über Befehl *Schaltfläche()*)
- Kontrollkästchen
 - Funktion: Ein-/Ausblenden von Objekten durch Anklicken
 - Anleitung zur Erstellung: Auswahl des Werkzeugs → Klicken in die Grafik-Ansicht zur Festlegung der Position des Kontrollkästchens → Festlegen von Beschriftung und Objekt, das mithilfe des Kontrollkästchens ein- bzw. ausgeblendet werden soll (Alternativ: Erstellung über Befehl *Kontrollkästchen()*)
- Schieberegler $a=2$
 - Funktion: Variation von Objekten (Parametervariation)
 - Anleitung zur Erstellung: Auswahl des Werkzeugs → Klicken in die Grafik-Ansicht zur Festlegung der Position des Schiebereglers → Festlegen des Namens → Intervall: Festlegen, ob Zahl, Winkel oder ganze Zahl erstellt werden soll sowie Intervall [min, max] und Schrittweite → Schieberegler: Auswahl der Position (fixiert, zufällig) und Ausrichtung (horizontal, vertikal) → Animation: Festlegen der Geschwindigkeit und Animation (Alternativ: Erstellung über Befehl *Schieberegler(<Min>,<Max>,<Schrittweite>,<Geschwindigkeit>,<Breite>,<IstWinkel>,<Horizontal>,<Animiert>,<Zufällig>)*)

- Text ABC
 - Funktion: Erzeugen von statischen, dynamischen Texten oder LaTeX-Formeln (in Kombination mit Kontrollkästchen können Texte z. B. als Text-/Hilfsfelder für Tipps genutzt werden)
 - Anleitung zur Erstellung: Auswahl des Werkzeugs → Klicken in die Grafik Ansicht → Erstellen des Textes oder der LaTeX-Formel (Alternativ: Erstellung über Befehl `Text()` mit verschiedenen Optionen)

(Funktionen und Anleitungen weiterer Werkzeuge finden Sie im GeoGebra-Handbuch, s. Linksammlung)

Digitale Arbeitsblätter und Lernumgebungen erkunden und entwickeln:

- Auf der Website von GeoGebra (s. Linksammlung) können vom GeoGebra Team sowie anderen Nutzer*innen erstellte Lernumgebungen und digitale Arbeitsblätter bzw. Unterrichtsmaterialien zu verschiedenen mathematischen Themen erkundet werden, die ggf. für den eigenen Unterricht genutzt werden können.
- Gestaltung von Materialien:
 - Es können auch in dem eigenen Profil, unter dem Reiter  eigenständig digitale Materialien/Arbeitsblätter oder Lernumgebungen entwickelt werden.
 - Bei der Gestaltung von sog. „Aktivitäten“ können einzelne digitale Arbeitsblätter erstellt werden.
 - Bei der Gestaltung von sog. „Büchern“ können digitale Lernumgebungen gestaltet werden, die mehrere Aktivitäten beinhalten (können).
 - In die Aktivitäten können zahlreiche Elemente eingebaut werden:
 - Text
 - GeoGebra-Applets
 - Notizen (Zeichenfeld)
 - Frage (offene Fragen, Mehrfachauswahl)
 - Integration von Videos, Bildern, PDF-Dateien
 - Integration von externen Websites
 - Nach Fertigstellung der Materialien kann die Sichtbarkeit ausgewählt werden (privat, öffentlich, mit Link teilen).
- Neben dem Austeilen des Materials über einen Link können die erstellten Materialien auch über die virtuelle Plattform „GeoGebra Classroom“ an die Lernenden ausgeteilt werden. Die Plattform ermöglicht es beispielsweise, den Fortschritt bei der Bearbeitung des Materials sowie bei einzelnen Aufgaben zu beobachten.

(für weitere Infos zu „GeoGebra Classroom“ s. Link in der Linkliste)

Linksammlung:

- [Anleitung zum Hochladen von Arbeitsblättern](#)
- [Erkundung von GeoGebra Materialien](#)
- [GeoGebra Classroom](#)
- [GeoGebra-Handbuch](#)
- [geogebra.org](https://www.geogebra.org)
- [GeoGebra-Dateien des Workshops](#)

Literaturbasis des Workshops

- Bauer, A. (2015). *Argumentieren mit multiplen und dynamischen Repräsentationen*. Würzburg University Press.
- Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: Combining different views on using digital technology in mathematics education. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Hrsg.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Bd. Plenaries* (Nummer 1). Freudenthal Group. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279>
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education: A Concise Topical Survey*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4>
- Fuglestad, A. B. (2004). ICT Tools and Students' Competence Development. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Gerhardts, L., Kamin, A.-M., Meister, D. M., Richter, L., & Teichert, J. (2020). Lernen auf Distanz – Einblicke in den familialen Alltag des Homeschoolings und Formen der Bewältigung. *Medienimpulse*. <https://doi.org/10.21243/MI-02-20-30>
- Hankeln, C., & Greefrath, G. (2020). Mathematische Modellierungskompetenz fördern durch Lösungsplan oder Dynamische Geometrie-Software? Empirische Ergebnisse aus dem LIMo-Projekt. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 367-394. <https://doi.org/10.1007/s13138-020-00178-9>
- Haug, R. (2012). *Problemlösen lernen mit digitalen Medien: Förderung grundlegender Problemlösetechniken durch den Einsatz dynamischer Werkzeuge*. Vieweg + Teubner.
- Haug, R., & Leuders, T. (2009). Erwerb von Problemlösetechniken beim Lernen mit Modellierungswerkzeugen. In *Lernchance Computer: Strategien für das Lernen mit digitalen Medienverbänden* (S. 201–222). Waxmann.
- Hohenwarter, M. (2014). Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 11–18.
- Jones, K. (2002). Research on the use of dynamic software: Implications for the classroom. *MicroMath*, 18, 18–20.
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2017). *Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2016 in der Fassung von 07.12.2017. https://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Oldenburg, R. (2005). Bidirektionale Verknüpfung von Computeralgebra und dynamischer Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(3), 249–273. <https://doi.org/10.1007/BF03339025>
- Olsson, J. (2019). Relations Between Task Design and Students' Utilization of GeoGebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 5(3), 223–251. <https://doi.org/10.1007/s40751-019-00051-6>
- Roth, J. (2019). Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht – Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (S. 233–248). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24292-3_17