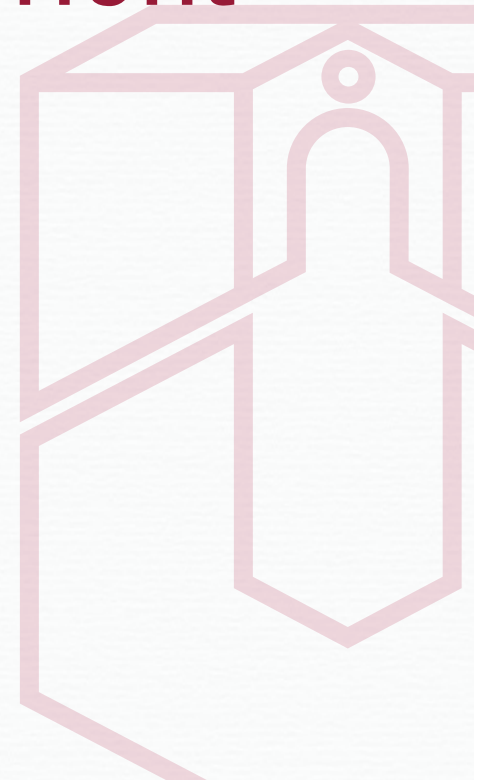




Selbstdifferenzierung durch graphisches Differenzieren und Integrieren im Mathematikunterricht

Osnabrück, 04. September 2023

Alexander Salle (Universität Osnabrück)

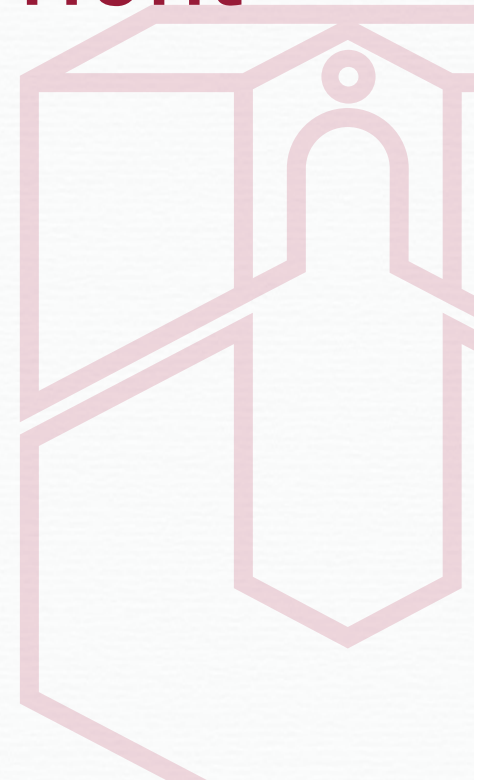




Selbstdifferenzierung durch graphisches Differenzieren und Integrieren im Mathematikunterricht

Osnabrück, 04. September 2023

Alexander Salle (Universität Osnabrück)



Selbstdifferenzierung

Das Problem: Wie kann man den unterschiedlichen Lernenden gerecht werden und sie ihren Fähigkeiten, ihrem Leistungsstand, ihren (körperlichen, geistigen, ...) Voraussetzungen etc. entsprechend fördern?

In Bezug auf Aufgaben: Wie kann eine Aufgabe Bearbeitungen auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus, mit unterschiedlichen Strategien ermöglichen?

➔ Äußere Differenzierung

- Trennung von Lerngruppen
- unterschiedliche Aufgaben

➔ Innere Differenzierung

(Binnendifferenzierung)

- Gemeinsame Lerngruppe oder zeitweise Gruppierung
- z.T. unterschiedliche Aufgaben

➔ Selbstdifferenzierung

- Gemeinsame Lerngruppe
- gleiche Aufgabe

Kalkül und Vorstellungen

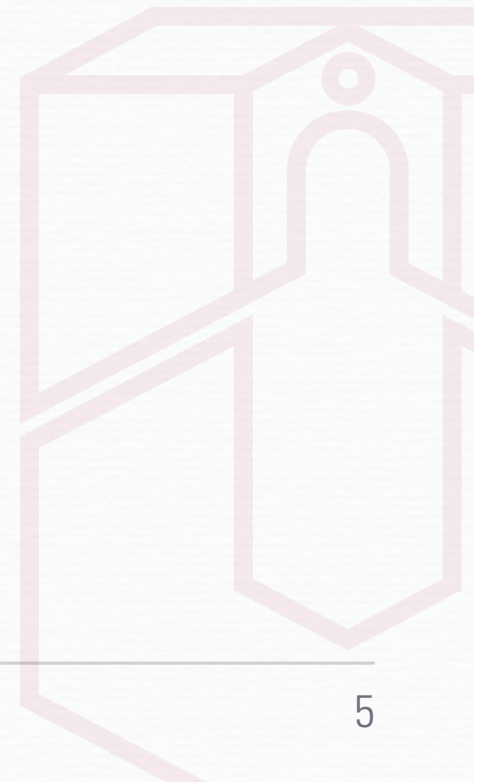
- „Anschaulichkeit“ ist Kernforderung schulischen Lehrens und Lernens
- Anknüpfung an Handlungen, Bilder, Erfahrungen von Lernenden
- Gefahr: Denkmuster tragen nicht bei Kernbegriffen der Analysis

- ➔ Formelsprache als Regulativ gegen „Denkfehler“
- ➔ Unterricht ist Gratwanderung zwischen Vereinfachung und Verfälschung
- ➔ Sinnvolle Elementarisierungen & Vorstellungen in Verbindung mit Kalkül



Fokus auf Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler und wie man Vorstellungen ausbilden und fördern kann.

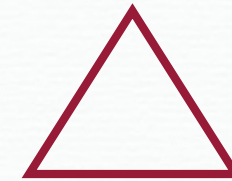
1. Ausgewählte Grundvorstellungen zu Integral und Ableitung



Grundvorstellungen

- ➔ idealtypische Deutungen mathematischer Konzepte („Wunschvorstellungen“)
- ➔ normative Leitlinien, die Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität beschreiben

Individuum



Realität

Mathematik

Bedeutungskonstitution
durch Anknüpfung an
Erfahrungen, Wissen oder
vorhandene Vorstellungen

Flexible mentale Modelle
erlauben **operative**
Manipulationen im
Arbeitsgedächtnis

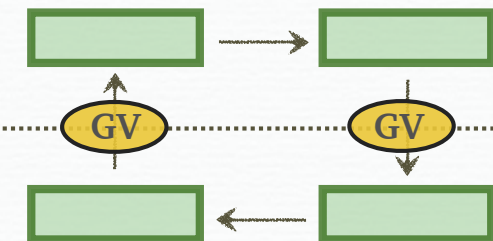
Fähigkeit zur Anwendung
mathematischer Konzepte
durch Erkennen
gemeinsamer Strukturen

Primäre GV

Alltägliche Kontexte
& Handlungen

Sekundäre GV

Symbolisch repräsentierte
Objekte & Manipulationen



Nutzen für Mathematikunterricht


$$\begin{array}{r} 12 \\ + 9 \\ \hline 21 \end{array}$$

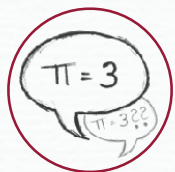
Der normative
Aspekt

- didaktische **Leitlinie** im Hinblick auf ein didaktisches Ziel
- hergeleitet aus inhaltlichen Überlegungen
- beschreibt **Deutungsmöglichkeiten** eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns



Der deskriptive
Aspekt

- Rekonstruktion **individueller Vorstellungen** von verschiedenen Lernenden
- weichen unterschiedlich stark von den normativen Leitlinien ab

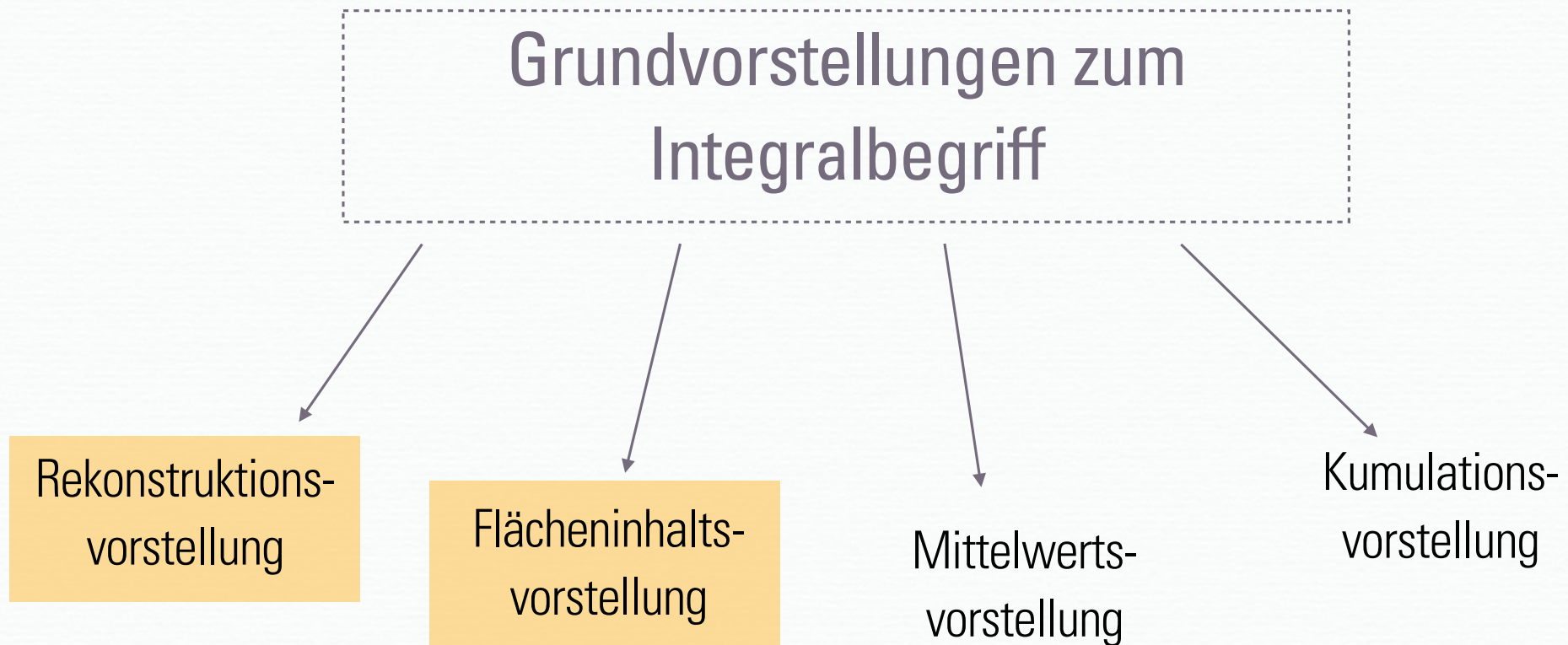


Der konstruktive
Aspekt

- **Planung** und Umsetzung von mathematischem Unterricht
- Grundlage ist die **Analyse & der Vergleich** normativer Leitlinien und deskriptiver Erkenntnisse

Grundvorstellungen zum Integralbegriff

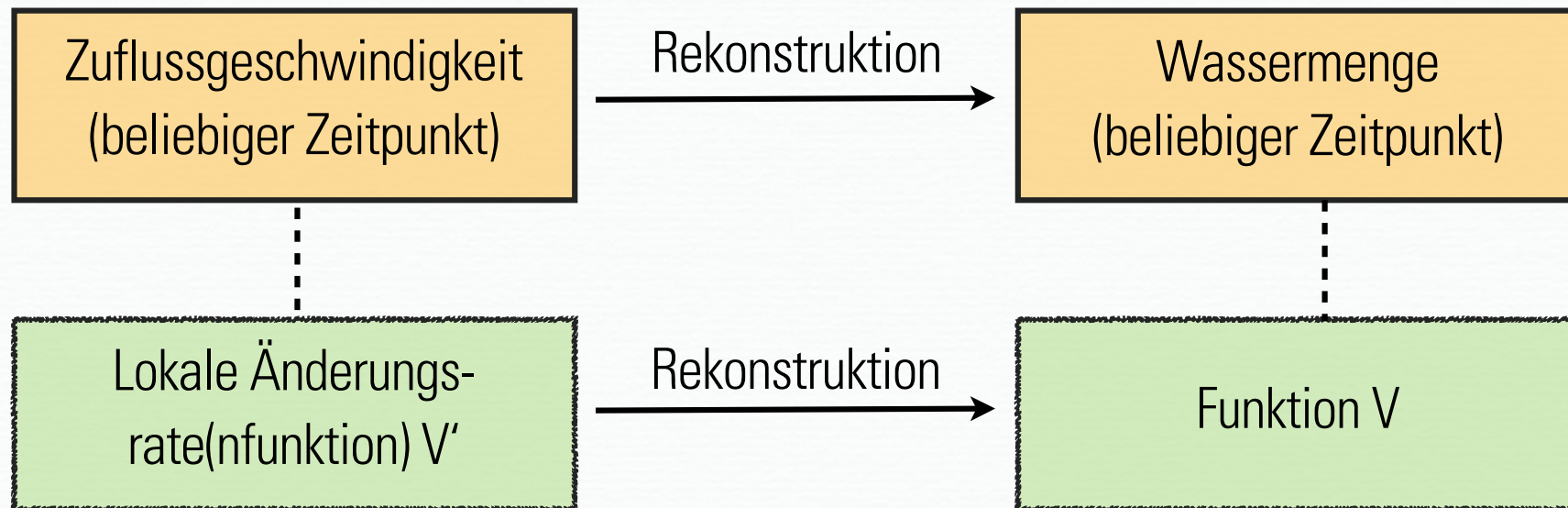
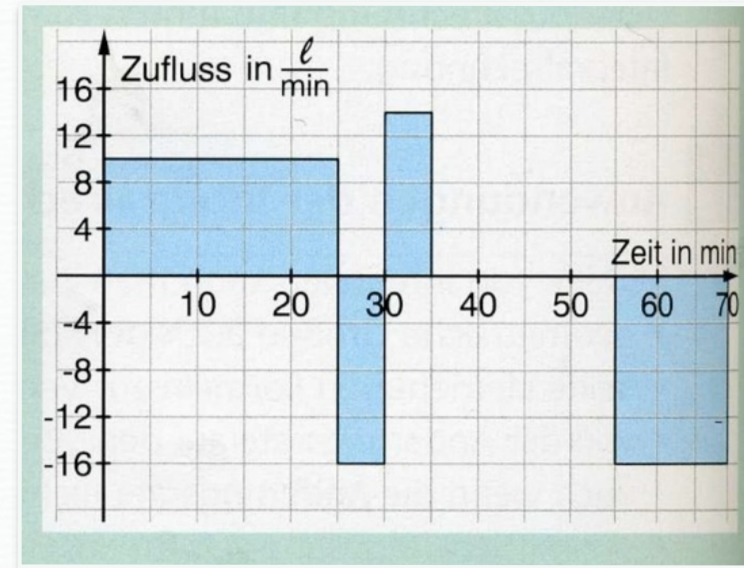
Greefrath et al. (2016)
Danckwerts & Vogel (2006)
Blum & Kirsch (1979)



Rekonstruktionsvorstellung

Das Integral einer Funktion als
rekonstruierter Bestand aus
Änderungsraten

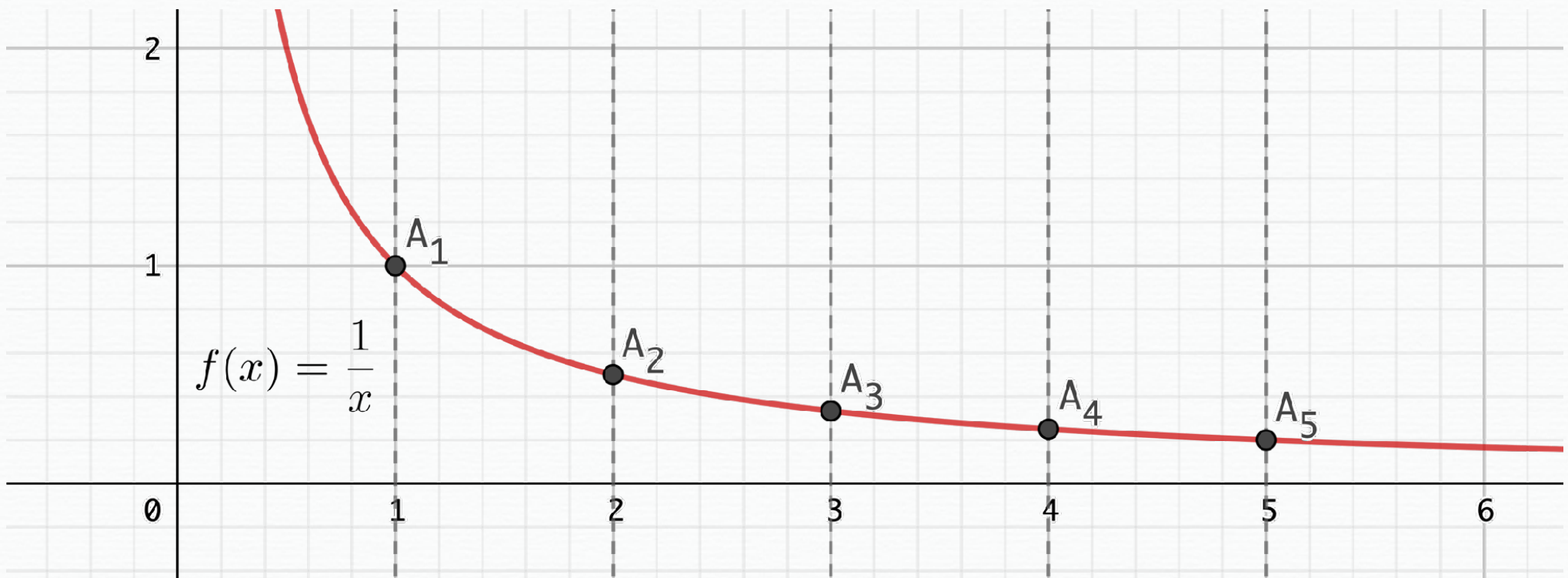
→ a) sachkontextbezogen



Rekonstruktionsvorstellung

Das Integral einer Funktion als
rekonstruierter Bestand aus
Änderungsraten

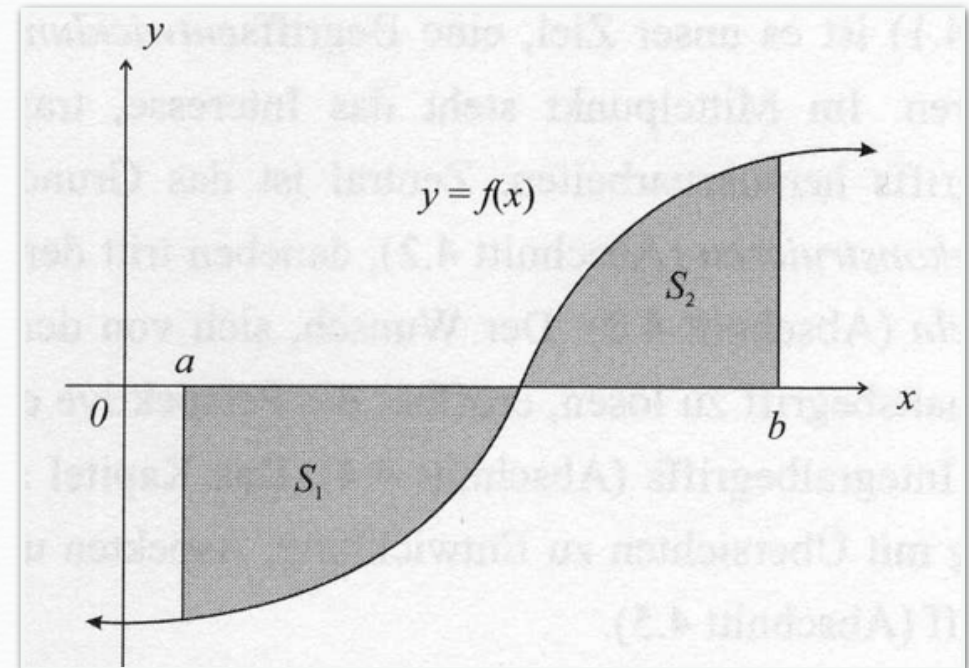
- b) innermathematisch: Rekonstruktion einer Stammfunktion
- keine Betrachtung des Flächeninhalts



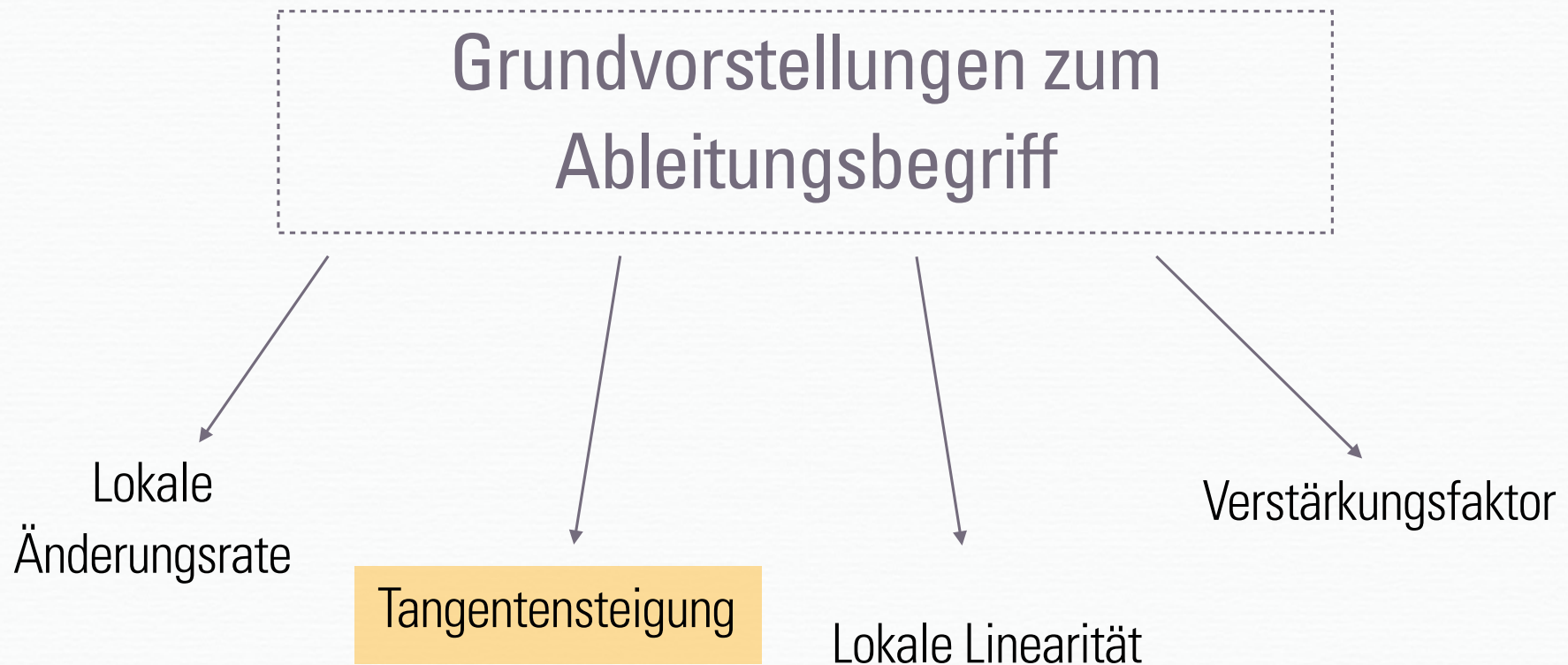
Flächeninhaltsvorstellung

Das (bestimmte) Integral einer Funktion als orientierter Flächeninhalt eines durch den Funktionsgraphen festgelegten Flächenstücks

- Grundvorstellungsumbruch aus der Sekundarstufe I: „es gibt keine negativen Flächeninhalte“
- Felix Klein: „Schneiden Sie aus und wiegen Sie!“
- Vorstellung umfasst Integralfunktion, Ergebnisse von Berechnungen, etc.

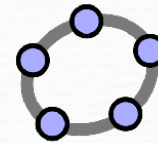


Graphisches Differenzieren

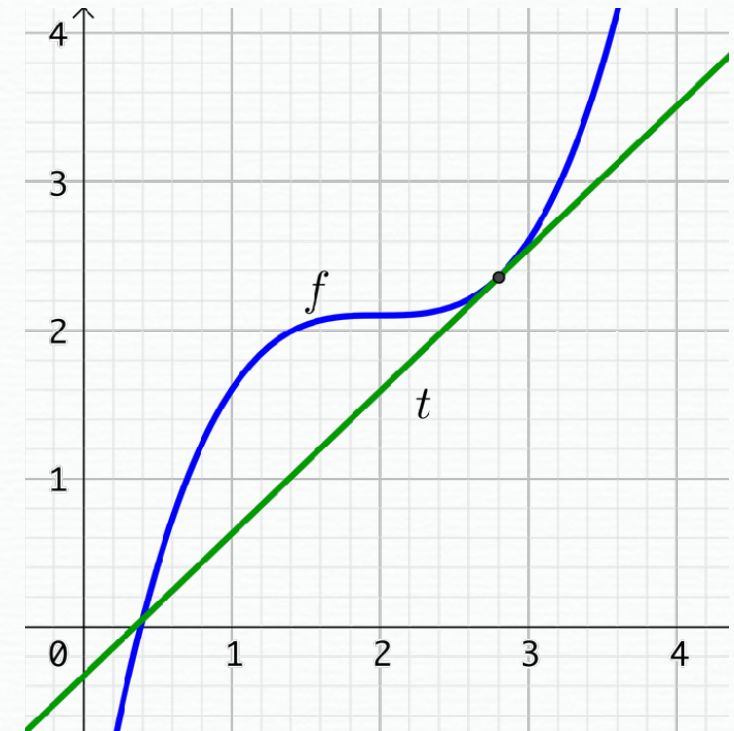


Tangentensteigung

Die Ableitung einer Funktion an einem Punkt gibt die Steigung der Tangente in diesem Punkt an



- ➔ Statisch: Schmieggerade in einem Punkt
- ➔ Dynamisch: Den Graphen entlang
- global vs. lokal
- Blick auf beliebig kleine Umgebung eines Punktes



Grundvorstellungsumbrüche

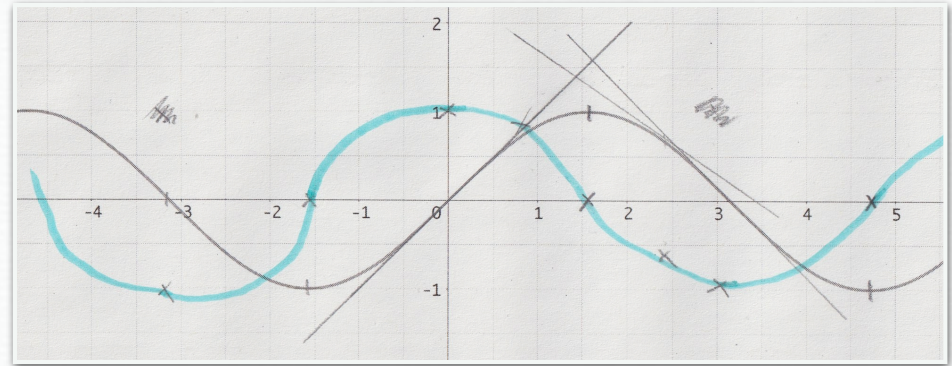
Weiterentwicklung Tangentenbegriff

Büchter (2014)

Kreistangente ➔ Berührgerade ➔ Schmieggerade

Graphische Verfahren im Unterricht

- Grundvorstellungen **eng verbunden** mit graphischen Darstellungen
- **Übertragung zentraler Begriffe** der Analysis in Graphische
- Zeichnen/Skizzieren des Graphen einer **Integralfunktion** bzw. Skizze des Graphen der **Ableitungsfunktion**
- **Graphische Verfahren** ermöglichen die Thematisierung **verschiedener Grundvorstellungen**.



„Die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion werden **mindestens grafisch plausibel** gemacht.“

Kerncurriculum Mathematik GOst. NI (2018)

Anhand der **grafischen Darstellung von Änderung und Bestand** werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als **Flächeninhalt** interpretiert werden.

Kerncurriculum Mathematik GOst. NI (2018)

Die Schülerinnen und Schüler **leiten** Funktionen **graphisch ab**.

Kernlehrplan NRW Sek. II (2014)

leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen

Kernlehrplan NRW Sek. II (Entwurf 2023)

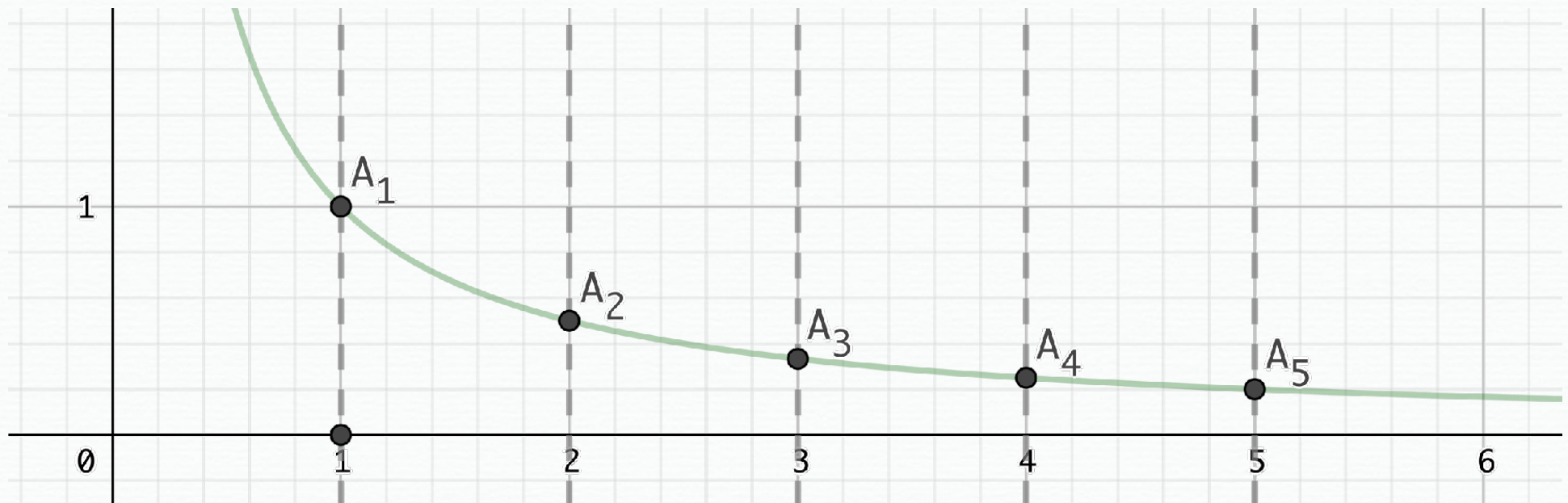
2. Graphisches Integrieren



Graphisches Integrieren

Flächeninhaltsvorstellung

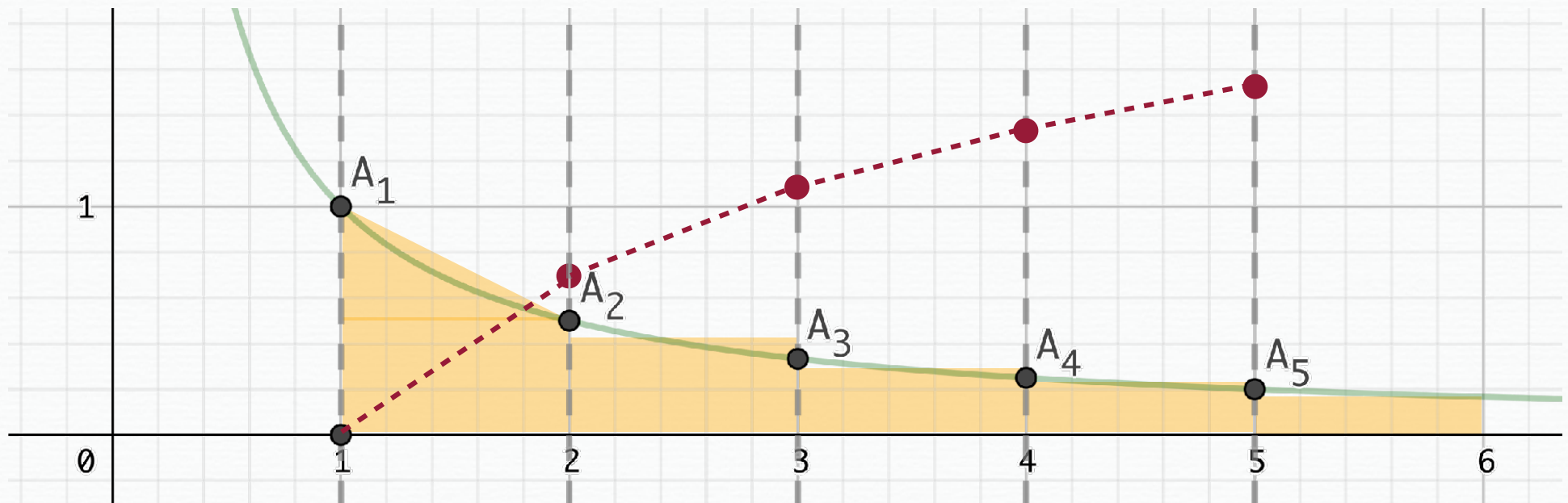
Das (bestimmte) Integral einer Funktion als orientierter Flächeninhalt eines durch den Funktionsgraphen festgelegten Flächenstücks



Graphisches Integrieren

Flächeninhaltsvorstellung

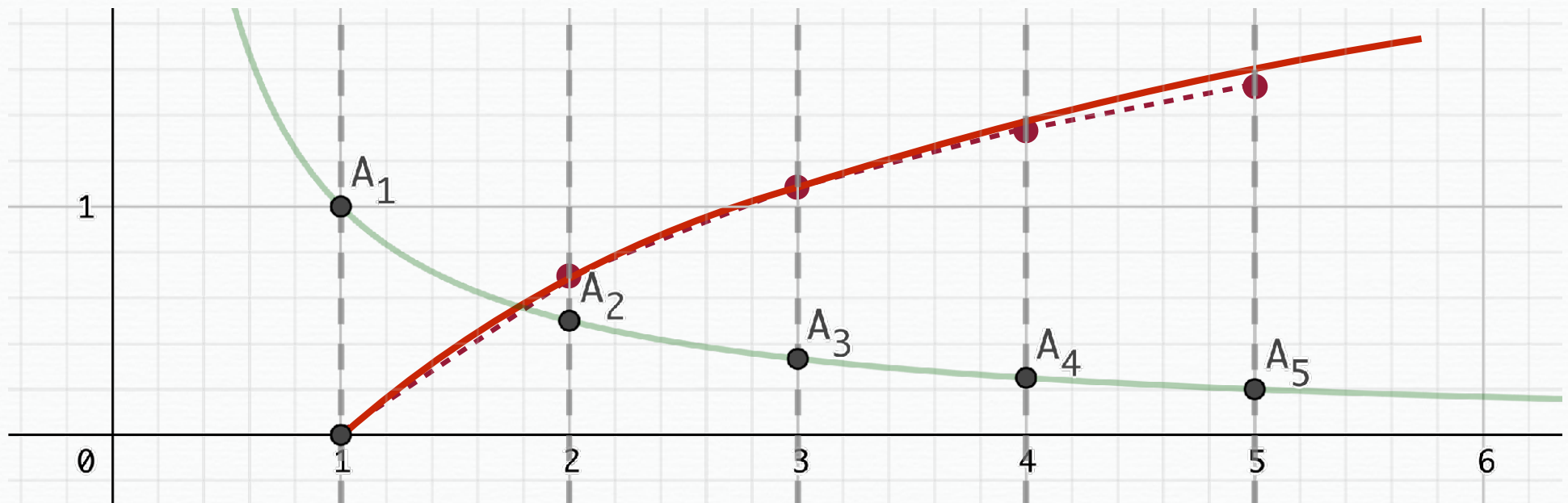
Das (bestimmte) Integral einer Funktion als orientierter Flächeninhalt eines durch den Funktionsgraphen festgelegten Flächenstücks



Graphisches Integrieren

Flächeninhaltsvorstellung

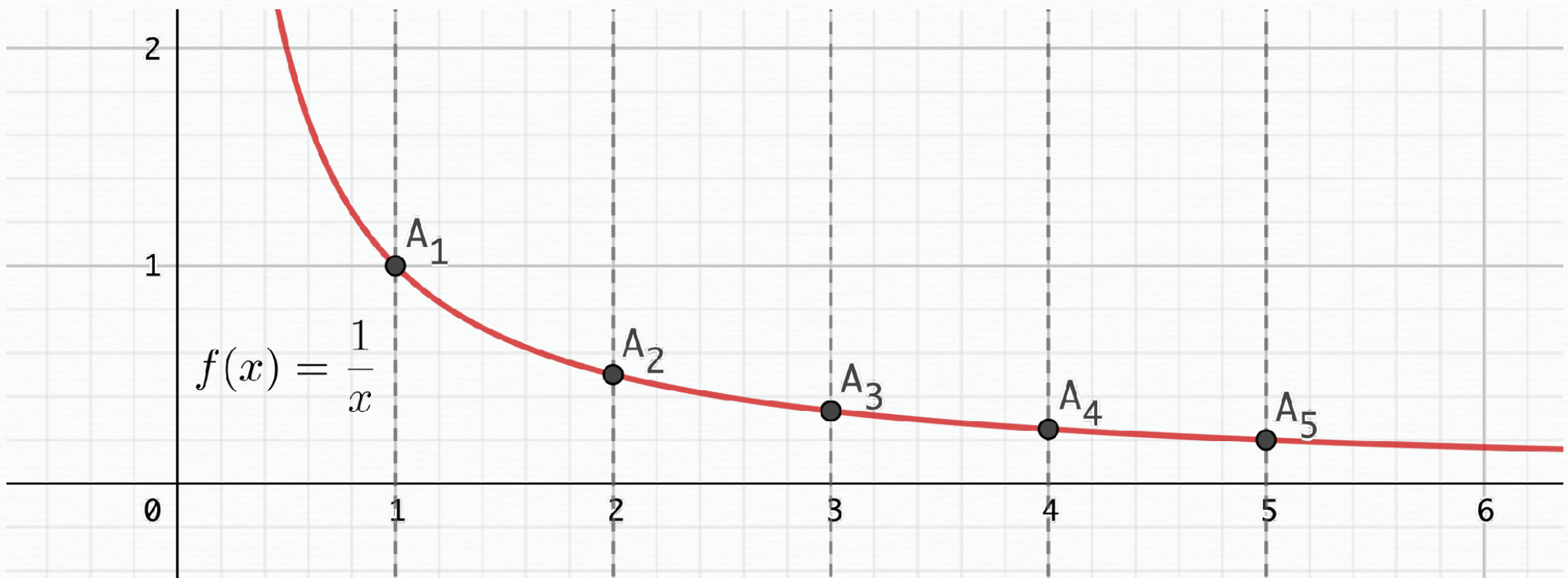
Das (bestimmte) Integral einer Funktion als orientierter Flächeninhalt eines durch den Funktionsgraphen festgelegten Flächenstücks

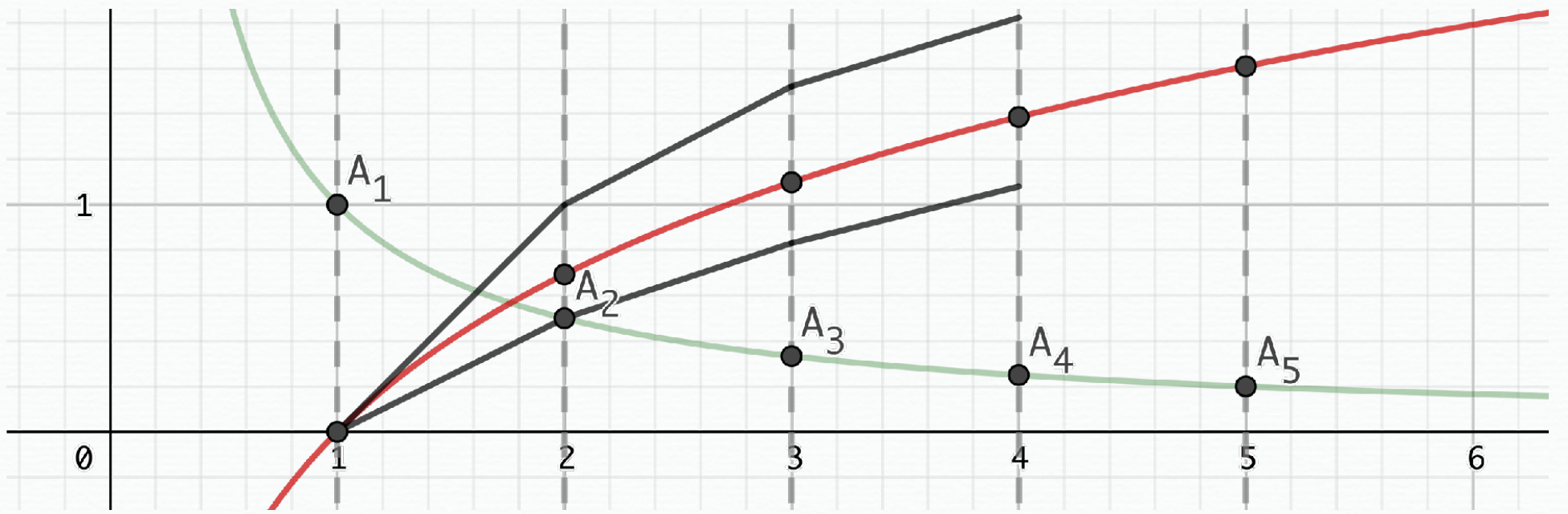
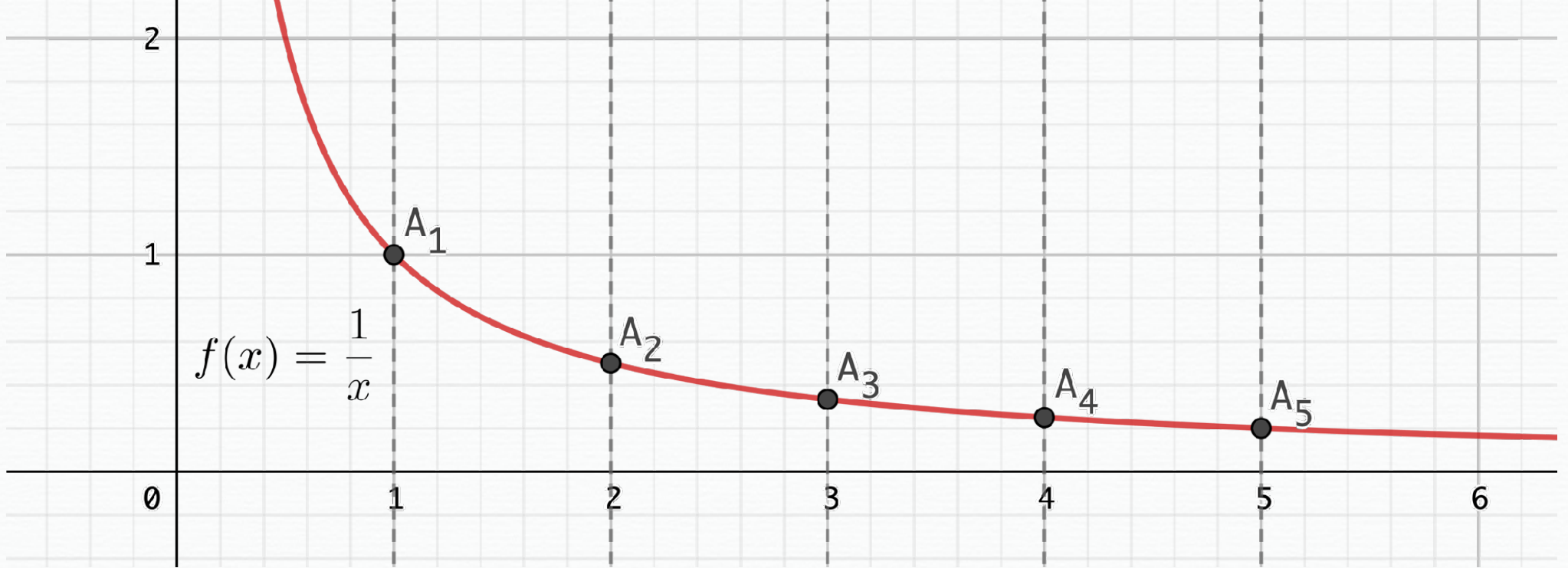


Rekonstruktionsvorstellung

Das Integral einer Funktion als
rekonstruierter Bestand aus
Änderungsraten

- b) innermathematisch: Rekonstruktion einer Stammfunktion
- keine Betrachtung des Flächeninhalts





Arbeitsphase „Graphisches Integrieren“

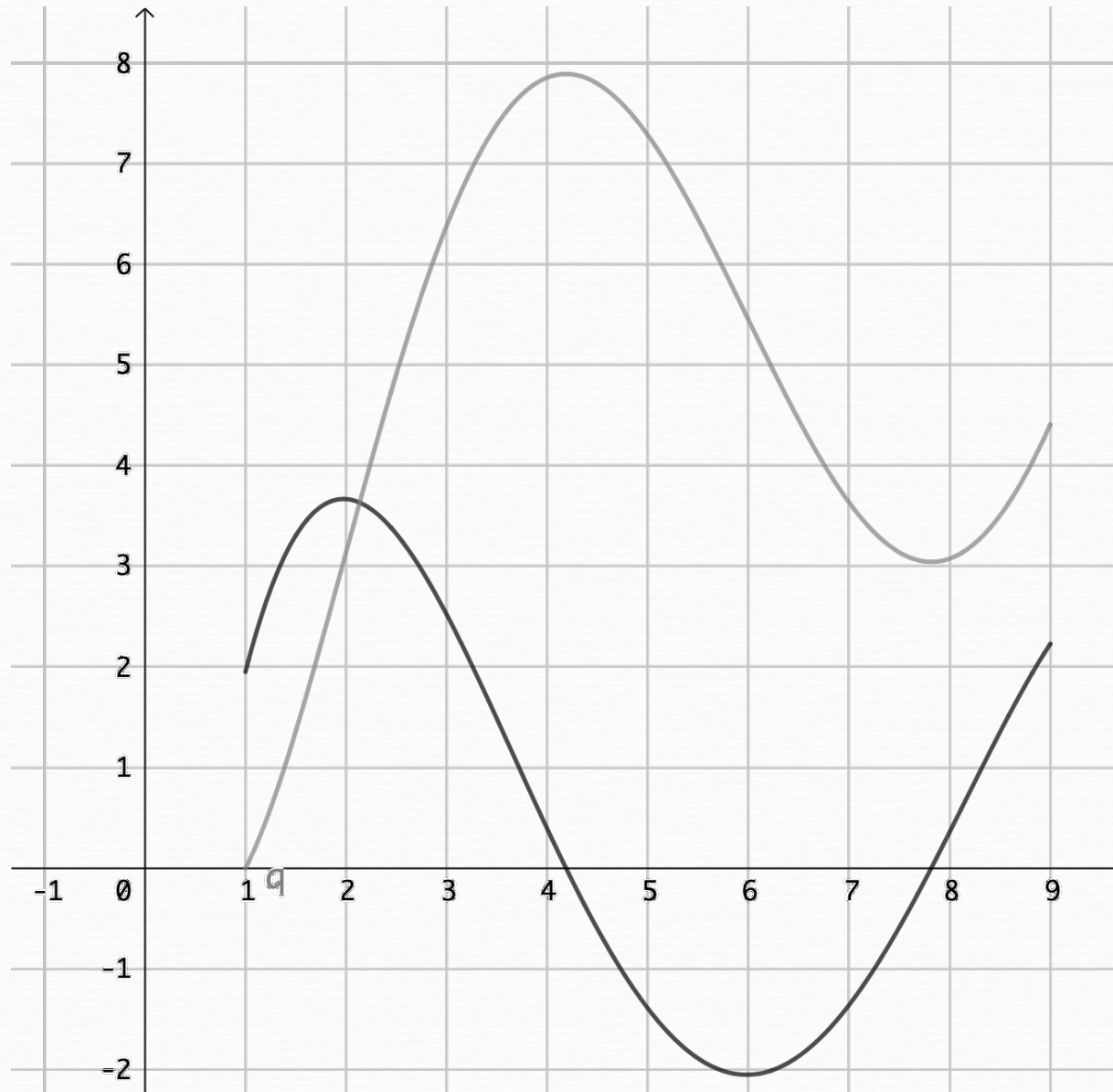


25 min

Bilden Sie Gruppen von zwei Personen.

- a) Integrieren Sie den abgebildeten Funktionsgraphen graphisch.
(Teilen Sie sich auf: Eine Person nutzt ausschließlich die **Rekonstruktionsvorstellung**, die andere Person ausschließlich die **Flächeninhaltsvorstellung**.)
- b) Tauschen Sie sich darüber aus, wie Sie bei der Lösung vorgegangen sind.
Vergleichen Sie insbesondere die beiden möglichen Vorgehensweisen **hinsichtlich der Nutzung im Analysisunterricht** – was sind **Vor- und Nachteile** der jeweiligen Methode?
- c) Entwickeln Sie einen **eigenen Funktionsgraphen** bzw. eine **eigene Aufgabe** für das graphische Integrieren, um **selbstdifferenzierendes Arbeiten** zu ermöglichen.
Welche **Eigenschaften** des Graphen sind hierfür förderlich?

Integrierter Graph



3. Potentiale und Herausforderungen für eine unterrichtliche Umsetzung



Potentiale & Herausforderungen

Übersicht

Vielfältige unterrichtliche
Einsatzmöglichkeiten

Informationsreiche
Diagnose individueller
Vorstellungen

Vermeidung/Thematisierung
„graphischer Algorithmen“

Berücksichtigung einer
ganzheitlichen Begriffsbildung

Vernachlässigung der
Charakteristika spezifischer
Funktionsklassen

Potentiale

Vielfältige unterrichtliche Einsatzmöglichkeiten

Binnen- und
Selbstdifferenzierung

- **Bearbeitungstiefe:** Charakteristische Punkte, grundlegender Verlauf, Intervalle, Quantitäten
- **Eigene Graphen** erstellen & mit Mitschülerinnen und -schülern austauschen

Approximatives Arbeiten

- Vorstellungen ausbilden durch Fokus auf die **Qualität** bestimmter Eigenschaften
- **Größenordnungen** einschätzen lernen

Spiralprinzip

- (Wieder-)Aufgreifen grundlegender Prinzipien bei **verschiedenen Funktionsklassen**

Operatives Prinzip/
Funktionales Denken

- **Aktives Operieren** mit grafischen Objekten
- Begriffliche Abhängigkeiten durch **Kovariation** verstehen

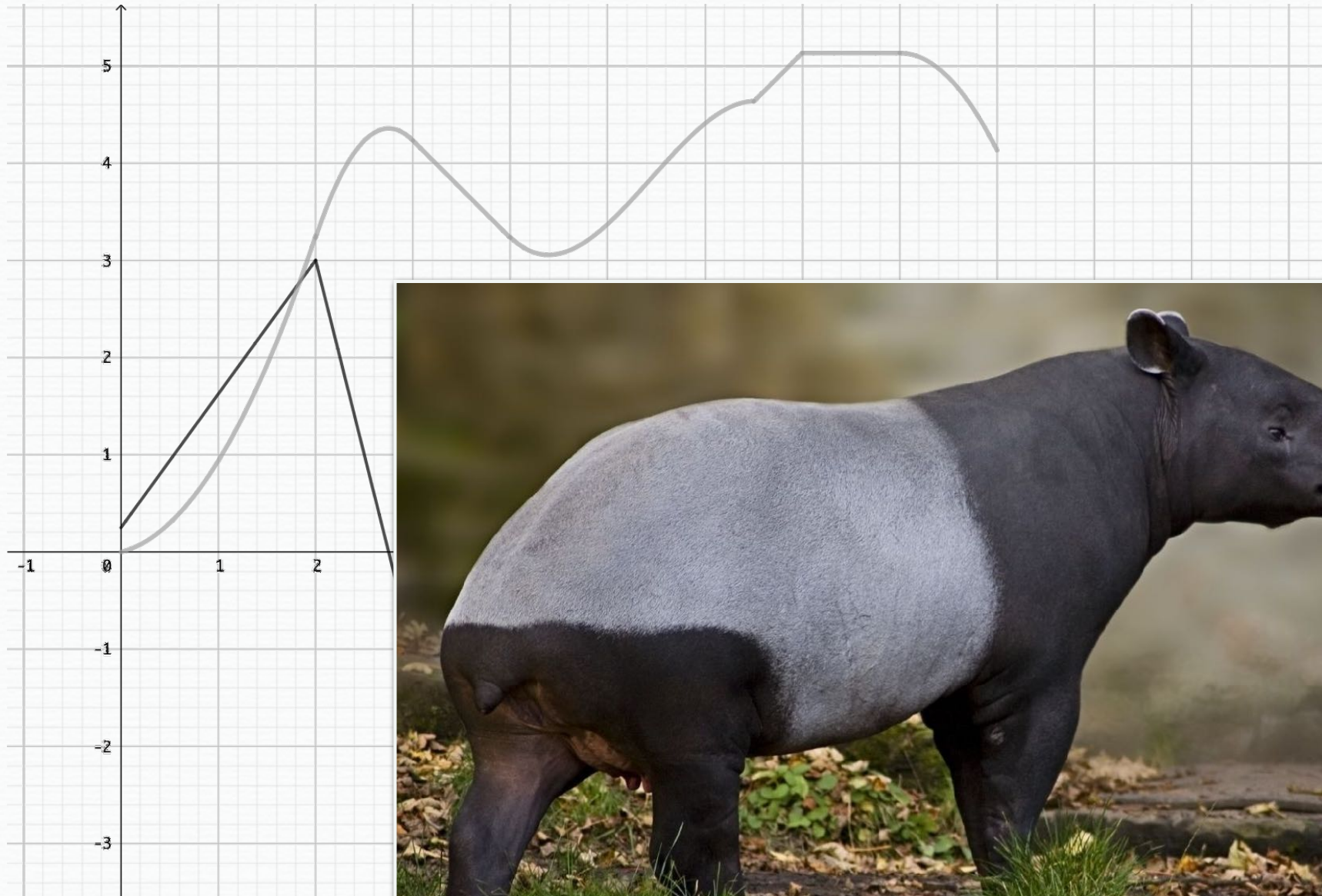
Potentiale

Diagnose individueller Vorstellungen zu Ableitung und Integral

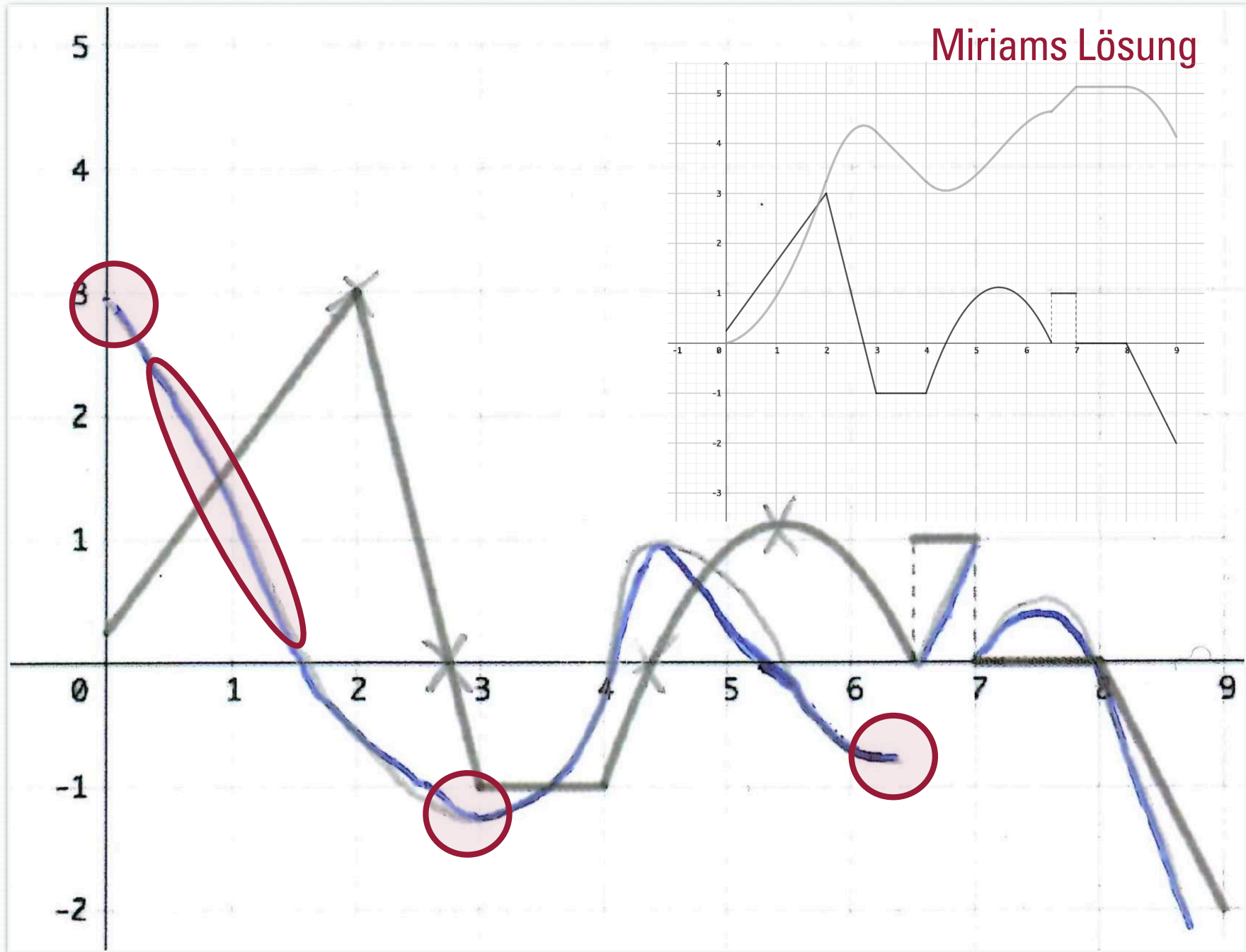


Potentiale

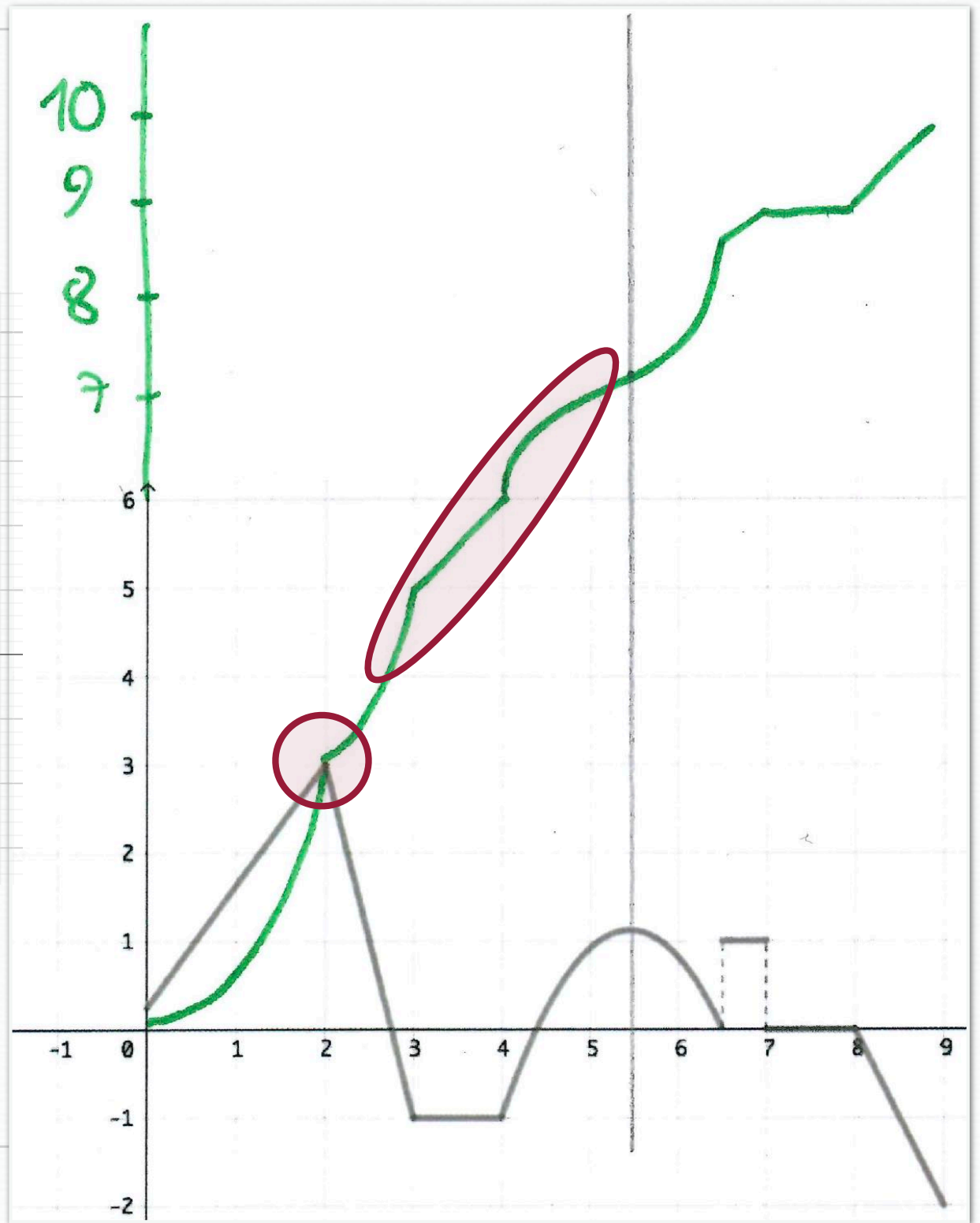
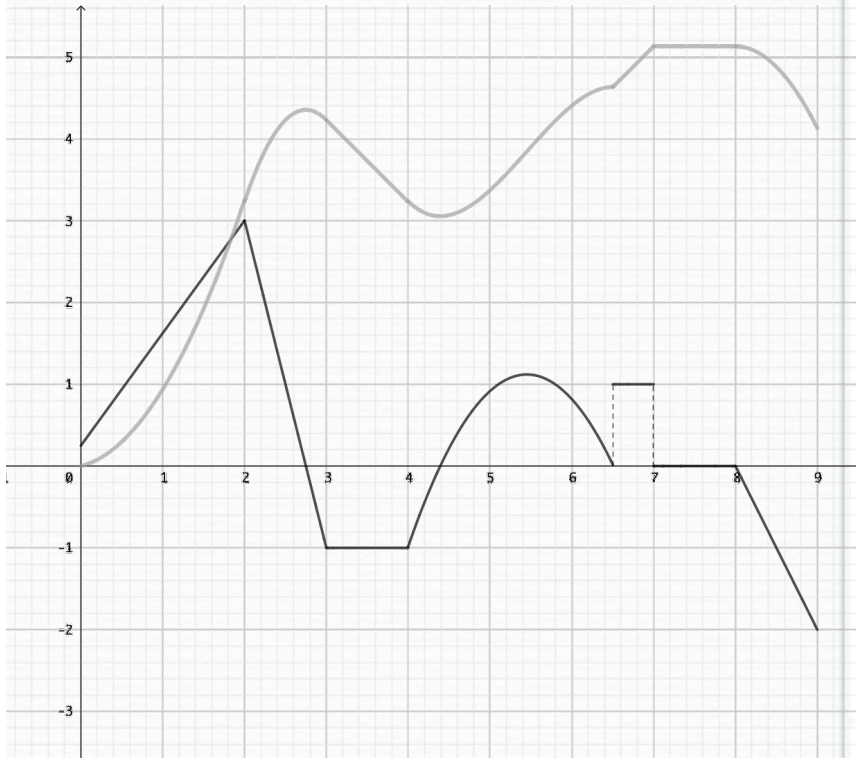
Diagnose individueller Vorstellungen zu Ableitung und Integral



Miriam's Lösung



Simons Lösung

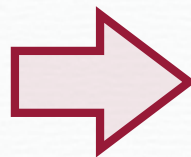


Auswendig gelernte Schemata

Beispiel für graphisches Differenzieren

- ➔ „An den Extremstellen der Funktion sind die Nullstellen der Ableitungsfunktion.“
- ➔ „Verlässt der Funktionsgraph den dargestellten Bereich nach oben rechts, ist die Ableitungsfunktion rechts der größten Nullstelle positiv, ansonsten negativ.“
- ➔ „Am linken Ende des Plots verfährt man analog.“
- ➔ „Nun zeichnet man den Graphen der Ableitungsfunktion und wechselt zwischen jeder Nullstelle das Vorzeichen.“

Rezeptcharakter



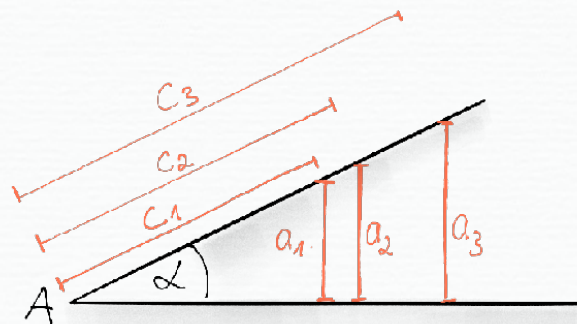
Das „Warum“ ins Zentrum stellen

Auswahl der Graphen

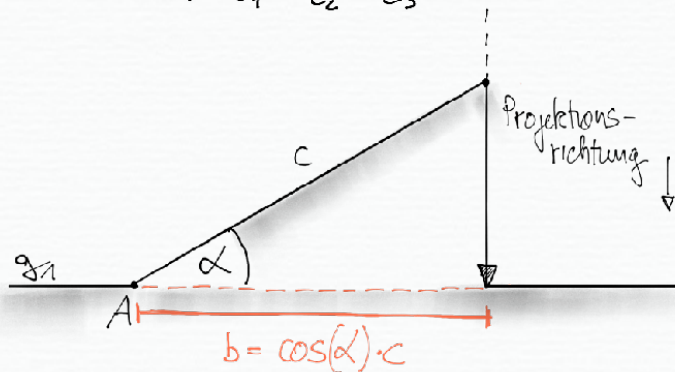
Herausforderungen

Charakteristika spezifischer Funktionsklassen

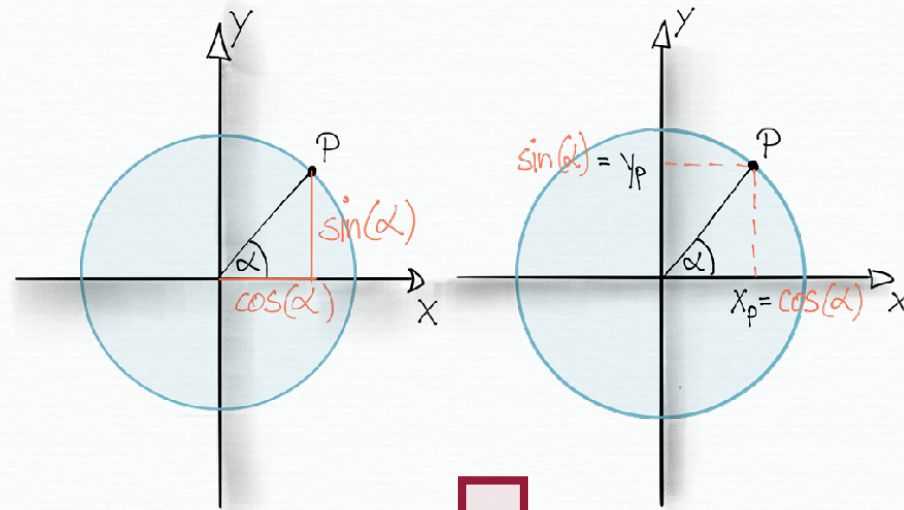
Grundvorstellungen zu rechtwinkligen Dreiecken



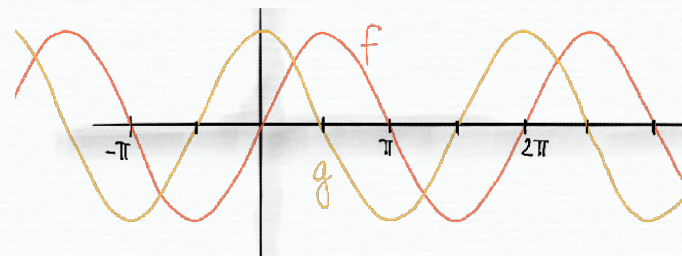
$$\sin(\alpha) = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3}$$



Grundvorstellungen zum Einheitskreis

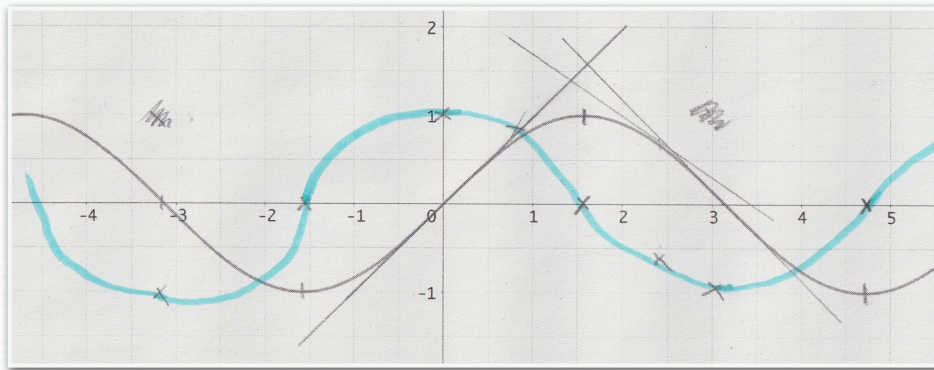


$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$



Grundvorstellungen zu trigonometrischen Funktionen

Grafisches Differenzieren (1. Schritt)

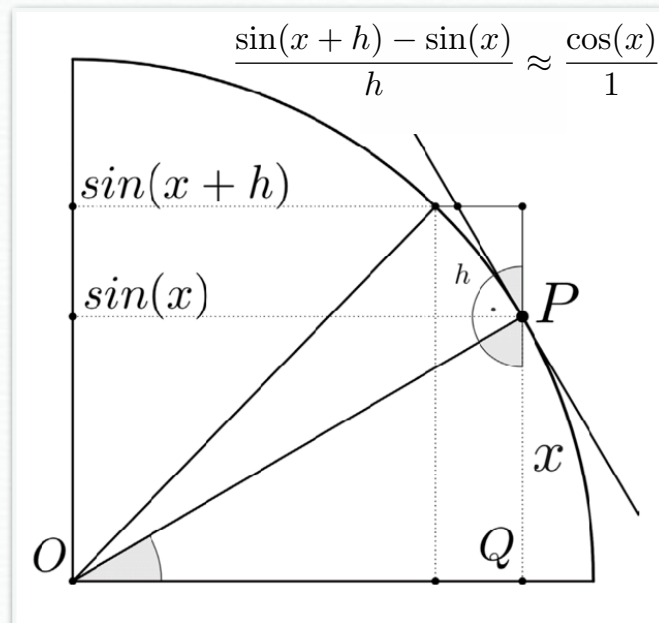


„Die Ableitungen der Sinus- und Kosinusfunktion werden mindestens grafisch plausibel gemacht.“

Kerncurriculum Mathematik GOst. NI (2018)

Grundvorstellungen zu
Funktionen und
Ableitungen

Geometrisch basierte Begründung (2. Schritt)



$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \approx \frac{\cos(x)}{1}$$

Grundvorstellungen zu
trigonometrischen
Funktionen

Grundvorstellungen zum
Einheitskreis

Grundvorstellungen zu
rechtwinkligen Dreiecken

Herausforderungen

Ganzheitliche Begriffsbildung

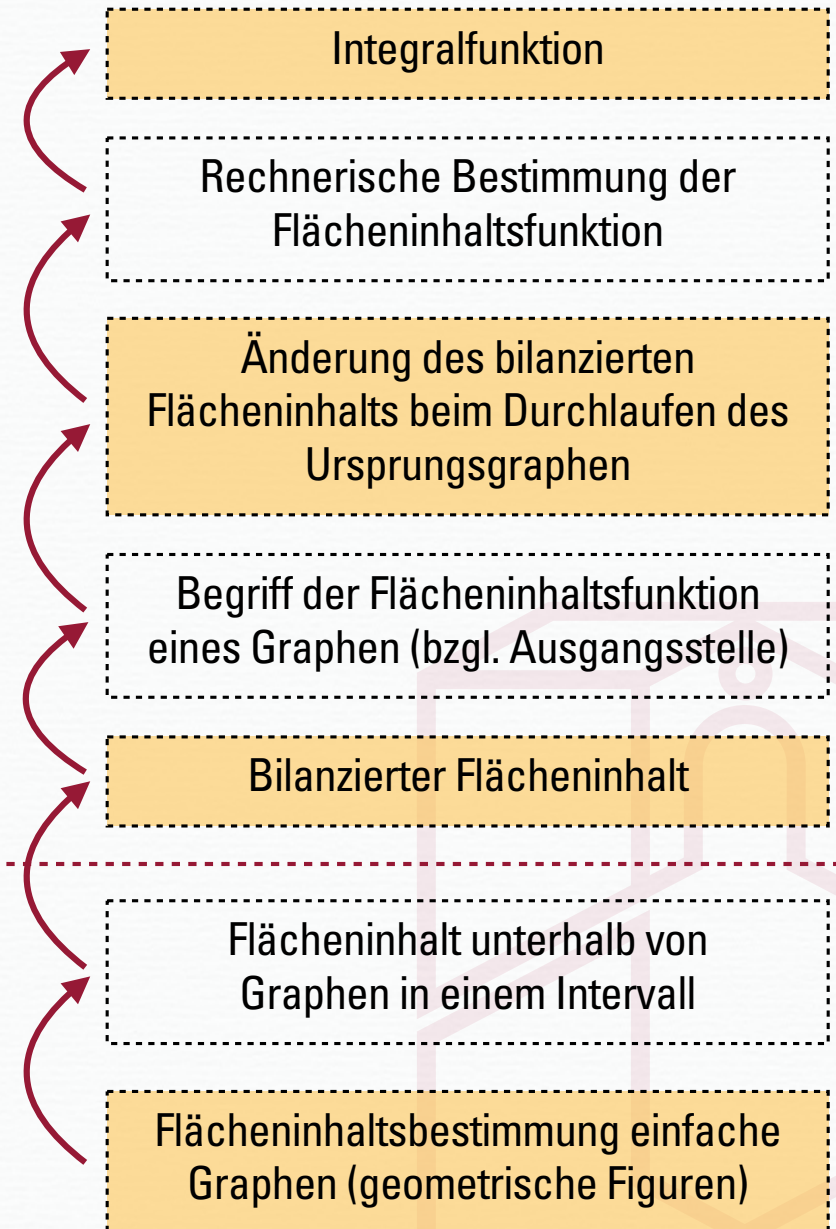
Flächeninhalt in der Sekundarstufe I

- Flächeninhalt als Merkmal ausgewählter geometrischer Figuren
- Approximative und rechnerische Bestimmung

Flächeninhalt im Rahmen der Integralrechnung

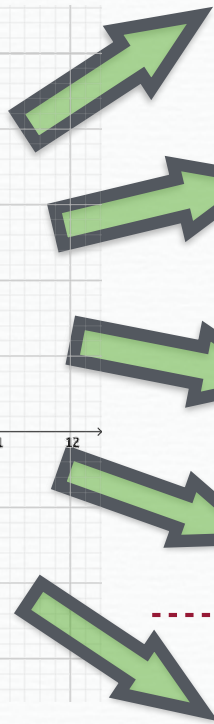
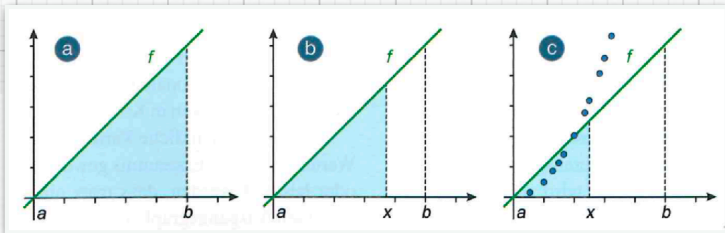
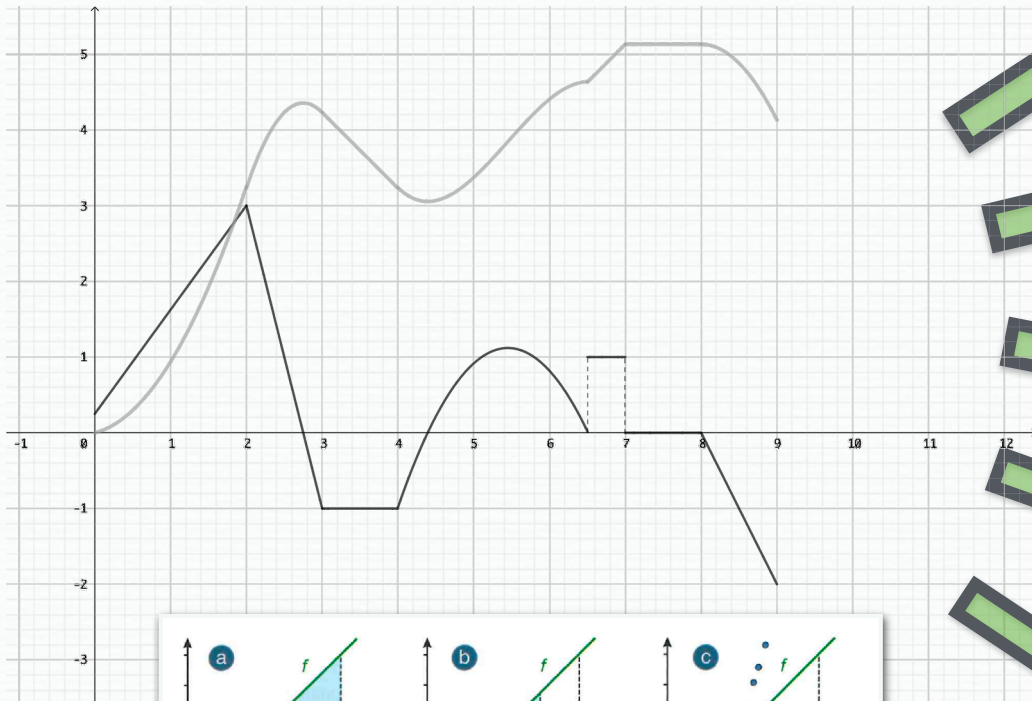
- Bilanzierung des Flächeninhalts
- Bestimmung für (quasi) beliebig umrandete Flächen

- ➔ **Flächen verschwinden und werden zu Zahlen**
- ➔ **Anspruchsvolle Transferschritte**




Herausforderungen

Ganzheitliche Begriffsbildung



- Integralfunktion
- Rechnerische Bestimmung der Flächeninhaltsfunktion
- Änderung des bilanzierten Flächeninhalts beim Durchlaufen des Ursprungsgraphen
- Begriff der Flächeninhaltsfunktion eines Graphen (bzgl. Ausgangsstelle)
- Bilanzierter Flächeninhalt
- Flächeninhalt unterhalb von Graphen in einem Intervall
- Flächeninhaltsbestimmung einfache Graphen (geometrische Figuren)

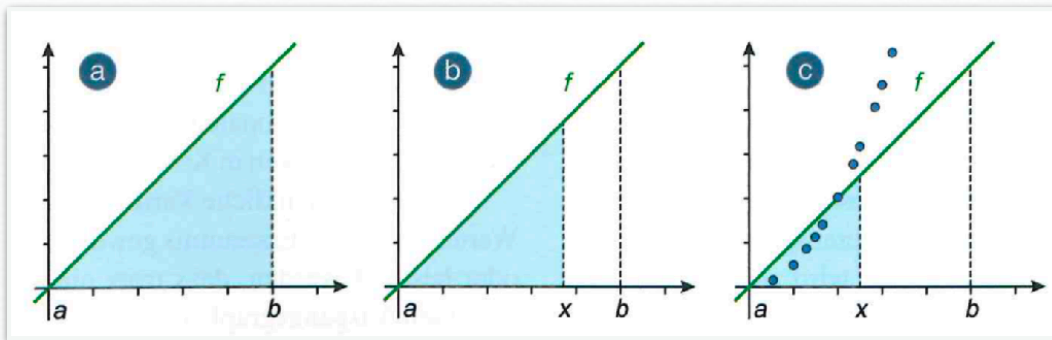
(Ko-)Variation der linken Intervallgrenze
mit Funktionswerten/-graph 

Kovariation von x-Werten und
bilanziertem Flächeninhalt 

Funktionale Betrachtung des Graphen & Inter-
pretation, unterschiedliche Intervallgrenzen

„Kompensation“ von
Flächeninhalten

Kumulativer Charakter



Integralfunktion

Rechnerische Bestimmung der
Flächeninhaltsfunktion

Änderung des bilanzierten
Flächeninhalts beim Durchlaufen des
Ursprungsgraphen

Begriff der Flächeninhaltsfunktion
eines Graphen (bzgl. Ausgangsstelle)

Bilanzierter Flächeninhalt

Flächeninhalt unterhalb von
Graphen in einem Intervall

Flächeninhaltsbestimmung einfache
Graphen (geometrische Figuren)

Herausforderungen

Steigung in der Sekundarstufe I

- Steigung als konstantes Merkmal einer linearen Funktion
- Mittlere Steigung über einem Intervall (bei anderen Funktionstypen)

Steigung in der Sekundarstufe II

- Steigung in einem Punkt (lokal/global)
- Das Steigungsdreieck verschwindet
- Kontinuierliche Steigungsänderung

➔ **Steigungen und Tangenten verschwinden und werden zu Zahlen**





Fragen & Diskussion

Alexander Salle (Universität Osnabrück)

